概均質ベクトル空間と相対不変式(不変式論とその周辺)

木村, 達雄

数理解析研究所講究録
444巻 1981年 198-208

概均質ベクトル空間と相対不変式

筑波大　数学系　　木村達雄

一般に n 変数多項式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が不変式であるとは $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群 G があって，その作用で不変，即ち $f(gx)=f(x)$ ($x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$, $g\in G$) という事で，例えば，群 G が n 文字の置換群 $\mathfrak{S}_n$ なら $f(x_1,\cdots,x_n)$ は対称式である。群 G が単位群 $\{e\}$ ならば，すべての多項式は不変式になってしまう。群 G の作用が大きい程，不変式は"数学的に良い性質"(対称性 etc.)をもつものと考えられる。　そういう訳で，ここでは群 G の作用が極めて大きい場合の不変式について調べてみよう。

具体的には，次のような場合を考える。

連結線型代数群 G の有限次有理表現 $\rho: G\to GL(V)$ が Zariski-topology で dense な G-orbit をもつ場合を考える。

このとき，三つ組 (G,ρ,V) を概均質ベクトル空間 (pre-homogeneous vector space，略して P.V.) という。

ここでは，すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

この様な例は豊富にみつかっており，群Gが reductive の場合は完全に分類ができている（ρが既約の場合はM.Sato-T.Kimura Nagoya Math. J. vol 65 (1977)，ρが一般の場合は筆者により最近得られた。）。　この場合の不変式を考えるのであるが，少し一般化して，相対不変式を定義しよう。

多項式だけを考えるより，有理式まで含めて考える方が都合がよい。そこで，V上の有理式$f(x)$が，概均質ベクトル空間(G, ρ, V)の相対不変式であるとは，各$g \in G$に対して，gにのみ依存する定数があって$f(\rho(g)x) = \chi(g) \cdot f(x)$　$({}^{\forall}x \in V)$となる事，即ち定数倍のずれまで許した不変式であると定義する。このとき$\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$は準同型，即ち$G$の指標になる。

特に$\chi \equiv 1$の場合に，$f(x)$は絶対不変式であるという。絶対不変式は，定義から G-orbit $\{\rho(g)x_0 ; g \in G\}$ $(x_0 \in V)$上定数であるが，特に Zariski-dense な G-orbit が存在するから，それ自身定数である。　今，$f_1(x)$と$f_2(x)$が同じ指標χに対応する相対不変式とすれば，$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$は絶対不変式ゆえ定数，従って$f_1(x)$と$f_2(x)$は定数倍を除いて一致する。

言い換えれば，概均質ベクトル空間の相対不変式は対応する指標で定数倍を除いて一意的に決まってしまうのである。

この事実は概均質ベクトル空間の相対不変式達のもつ極めて重要な性質である。

$X(G)=\{\chi;\ \chi:G\to\mathbb{C}^\times\ hom.\}$ を G の指標群，$X_1(G)$ を相対不変式達に対応する指標からなる $X(G)$ の部分群とする。

$\rho(G)x_0=\{\rho(g)x_0;\ g\in G\}$ を Zariski-dense orbit，$S=V-\rho(G)x_0$ とすると S は Zariski-closed set になる。点 x_0 における isotropy subgroup $G_{x_0}=\{g\in G;\ \rho(g)x_0=x_0\}$ を generic isotropy subgroup という。そのとき $X_1(G)=\{\chi\in X(G);\ \chi(g)=1\ \text{for}\ {}^\forall g\in G_{x_0}\}$ が知られている。

さて $S=S^1\cup\cdots\cup S^l\cup S''$，$S^i=\{x\in V;\ f_i(x)=0\}$ $(i=1,\cdots,l)$ は codim 1 の既約成分，codim $S''\geqq 2$，と S を既約分解する。

（概均質ベクトル空間の相対不変式の基本定理）

各 $f_1(x),\cdots,f_l(x)$ は互いに代数独立な，(G,ρ,V) の相対不変式で，対応する指標を $\chi_1,\cdots,\chi_l$ とすれば，$X_1(G)$ は $\chi_1,\cdots,\chi_l$ で生成される rank l の free abelian group である。即ち，(G,ρ,V) の任意の相対不変式 $f(x)$ は一意的に $f(x)=cf_1(x)^{m_1}\cdots f_l(x)^{m_l}$ $(c\in\mathbb{C}^\times,\ (m_1,\cdots,m_l)\in\mathbb{Z}^l)$ と表わせる。

さて $\mathfrak{g}$ を G のリー環とし，$A\in\mathfrak{g}$，$t\in\mathbb{R}$ に対して

$\rho(\exp tA)=\exp t\,d\rho(A)$，$\chi(\exp tA)=\exp t\,\delta\chi(A)$ で

ρ の微分表現 $d\rho$，及び指標 χ の微分 $\delta\chi$ を定義する。

指標 χ に対応する相対不変式 $f(x)$ は $f(\rho(g)x)=\chi(g)f(x)$ をみたすが，ここで $g=\exp tA$ とおいて，両辺を t で微分して $t=0$ とおけば，$\langle d\rho(A)x,\ grad_x\rangle f(x)=\delta\chi(A)\cdot f(x)$

$(A\in\mathfrak{g})$ なる関係を得る。$\mathrm{grad}\log f(x)$ を $\dfrac{\mathrm{grad}_x f(x)}{f(x)}$ とおけば，

$$\langle d\rho(A)x,\ \mathrm{grad}\log f(x)\rangle = \delta\chi(A) \quad (A\in\mathfrak{g})$$

なる関係が得られるが，$x\in V-S$ であれば，概均質性により，$\{d\rho(A)x\ ;\ A\in\mathfrak{g}\}=V$ である。即ち，$\mathrm{grad}\log f(x)$ は V の dual space V^* の元とみる事ができ，

$$\mathrm{grad}\log f:\ V-S \longrightarrow V^*$$

なる写像が得られた事になる。

さて $g\in G$, $A\in\mathfrak{g}$ に対して，$\delta\chi(g^{-1}Ag)=\delta\chi(A)$, $d\rho(g^{-1}Ag)=\rho(g)^{-1}d\rho(A)\rho(g)$ (adjoint表現!) に注意すれば

$$\langle d\rho(A)\rho(g)x\ ,\ \mathrm{grad}\log f(\rho(g)x)\rangle=\delta\chi(A)=\langle d\rho(g^{-1}Ag)x,\ \mathrm{grad}\log f(x)\rangle$$

$= \langle d\rho(A)\rho(g)x,\ \rho^*(g)\mathrm{grad}\log f(x)\rangle$ で $\{d\rho(A)\rho(g)x\ ;\ A\in\mathfrak{g}\}=V$ ゆえ

$$\mathrm{grad}\log f(\rho(g)x) = \rho^*(g)\cdot\mathrm{grad}\log f(x) \quad (x\in V-S)$$

が得られる。即ち，$\mathrm{grad}\log f(V-S)$ は (G, ρ^*, V^*) の 1つの G-orbit である。但し ρ^* は $\langle x, y\rangle=\langle\rho(g)x,\ \rho^*(g)y\rangle$ ($\forall g\in G, \forall x\in V, \forall y\in V^*$) で定義される ρ の dual 表現である。

そこで，(G, ρ, V) の相対不変式 $f(x)$ で 写像 $\mathrm{grad}\log f$ が dominant，即ち $\mathrm{grad}\log f(V-S)$ が V^* で Zariski-dense，になるものがある場合を考えよう。

このとき，(G, ρ, V) は正則 (regular) であるといわれる。明らかに $\mathrm{grad}\log f(V-S)$ は (G, ρ^*, V^*) の Zariski-dense G-orbit であるから，(G, ρ^*, V^*) も概均質ベクトル空間になる。

一般には (G, ρ^*, V^*) は概均質とは限らない。例えば
$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a \neq 0, a, b \in \mathbb{C} \right\}$, $V = \mathbb{C}^2$, $\rho\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + by \\ ay \end{pmatrix}$ の dual は概均質ではない。

以下 (G, ρ, V) を正則概均質ベクトル空間としよう。$f(x)$ を $\mathrm{grad}\log f$ が dominant になるものとする ($\deg f > 1$ として可)。

$f(x)$ の Hessian を $H_f(x) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$ とおくと，$H_f(x) \not\equiv 0$ で $\frac{f(x)^n}{H_f(x)}$ $(n = \dim V)$ は指標 $\det_V \rho(g)^2$ に対応する相対不変式である事が示される。即ち $\det_V \rho(g)^2 \in X_1(G)$ である。正則でないとこれは一般には成り立たない。

$X_1^*(G)$ を (G, ρ^*, V^*) の相対不変式たちに対応する指標からなる $X(G)$ の部分群とする。そのとき $X_1^*(G) = X_1(G)$ がなりたつ。即ち $X_1^*(G)$ は $\chi_1^*, \cdots, \chi_\ell^*$ で生成される rank ℓ の free abelian group である。但し $S^* = \{f_1^* = 0\} \cup \cdots \cup \{f_\ell^* = 0\} \cup S^{*\prime\prime}$, $f_i^*(\rho^*(g)y) = \chi_i^*(g) f_i^*(y)$ $(i = 1, \cdots, \ell)$。$\langle \chi_1, \cdots, \chi_\ell \rangle = \langle \chi_1^*, \cdots, \chi_\ell^* \rangle$

さて，次の様な事を考えてみよう。

形式的に $f_1(x)^{s_1} \cdots f_\ell(x)^{s_\ell}$ の Fourier 変換 $\varphi^*(y)$ を考える。

$$\varphi^*(y) = \int_V f_1(x)^{s_1} \cdots f_\ell(x)^{s_\ell} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx \quad (y \in V^*)$$

然らば $\varphi^*(\rho^*(g)y) = \chi_1^{s_1}(g) \cdots \chi_\ell^{s_\ell}(g) \cdot \det_V \rho(g) \cdot \varphi^*(y)$
となるが，$\langle \chi_1, \cdots, \chi_\ell \rangle = \langle \chi_1^*, \cdots, \chi_\ell^* \rangle \ni \det_V \rho(g)^2$ であったから適当な $s_1^*, \cdots, s_\ell^*$ があって，$\chi_1^{s_1}(g) \cdots \chi_\ell^{s_\ell}(g) \cdot \det_V \rho(g) = \chi_1^{*\, s_1^*}(g) \cdots \chi_\ell^{*\, s_\ell^*}(g)$ と

表わせる。一方 $f_1^{*s_1^*}(y)\cdots f_l^{*s_l^*}(y)$ は指標 $\chi_1^{*s_1^*}(g)\cdots\chi_l^{*s_l^*}(g)$ に対応する (G, ρ^*, V^*) の相対不変式であるから，これが定数倍を除いて $\varphi^*(y)$ と一致する事が期待される。即ちある定数 c があって

$$\text{✡}\quad \int_V f_1(x)^{s_1}\cdots f_l(x)^{s_l} e^{2\pi i\langle x, y\rangle}dx = c\, f_1^{*s_1^*}(y)\cdots f_l^{*s_l^*}(y)$$

なる等式が期待される。一般に Fourier 変換の計算は大変難しいから，もしこの様な事がわかれば，色々役に立つ。

✡に関する議論で問題になる所は二つある。まず Fourier 変換を定義する為 (G, ρ, V) に *real structure* を入れ $V_{\mathbb{R}}$ 上で考える事，そして $f_1(x)^{s_1}\cdots f_l(x)^{s_l}$ に超関数として意味を与える事，更に $\varphi^*(y)$ と $f_1^{*s_1}\cdots f_l^{*s_l}(y)$ は同じ指標に対応する相対不変式ではあるが，有理式ではないから，定数倍を除いて一致するという論法はそのまゝでは使えない事などである。

しかし，議論を精密化する事によって，これらの困難は，克服でき，本質的には✡がやはり成立つのである。

これは1960年代の初めの頃，佐藤幹夫先生によって得られ，その後，更に新谷卓郎氏によって精密化された。([ ])

この✡に出てくる定数は本質的に Γ-因子と *exponential* 因子から成り，Γ-因子は *b*-関数といわれるものと対応している。

この *b*-関数は，各々の空間に対して *microlocal analysis* を用いて計算する事ができる。([ ],[ ],[ ],[ ]).

これは complex の範囲でできるが，更に real の範囲の microlocal analysis によって exponential 因子までこめて完全に決定する事ができる。(但し，これは一般的計算原理であって概均質ベクトル空間の超局所構造が余りに複雑な場合，実際の計算ができる為には更に深い理論を必要とする場合もある。例えば，尾関育三氏の研究した $(SL(5)\times GL(4),\ \Lambda^2\otimes\square,\ V(10)\otimes V(4))$ の超局所構造は余りに複雑な為，未だ b-関数も完全には決定していない([ ])。既約概均質ベクトル空間の b-関数は，この空間を除けば，すべて決定されている。)

更に $\mathbb{Q}$-構造が定義されているとき，G の不連続部分群 Γ と $V_{\mathbb{Q}}$ の Γ-不変な格子 L に対して

$$\xi(s_1,\cdots,s_\ell\,;L)=\sum_{L\cap(V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}})/\Gamma}\frac{\mu(x)}{|f_1(x)|^{s_1}\cdots|f_\ell(x)|^{s_\ell}}$$

但し $\mu(x)$ は density とよばれる量，のような形で（正確に述べると長くなるので省略）zeta 関数を定義すれば，これは関数等式をみたす事が b に基いて証明される。$\ell=1$ のときは新谷氏([ ])による。一般の多変数の場合は，最近，佐藤文広氏により証明された。数論への応用もある。

ここでは，概均質ベクトル空間の相対不変式について，どのような事が知られているか，ごく大ざっぱに説明しただけなので，興味ある人は直接文献できちんとした結果を知って下さい。

参考文献 I.(和文) (順不同)

[1]佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, 概均質ベクトル空間の理論,
数学の歩み15-1 (1970), 85-157

[2]新谷卓郎, 概均質ベクトル空間について, 数理科学5月号(1971)

[3] 短期共同研究, 概均質ベクトル空間の研究,
京大数理研講究録416 (1981年2月)

[4]木村達雄, 概均質ベクトル空間の理論, 数学32巻2号(1980年4月)

[5]木村達雄, 既約概均質ベクトル空間の研究, 東京大学修士論文(1973)

[6]川原 洋, スピン群の関係する概均質ベクトル空間について
東京大学修士論文(1974)

[7]鈴木利明, 概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換
名古屋大学修士論文(1975)

[8]佐藤文広, 正定値エルミート行列の概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータの関数等式について
東京大学修士論文(1975)

[9]室 政和, Microlocal calculus and Fourier transforms (in prehomogeneous vector spaces)
京都大学修士論文(1976)

[10] 京大数理研講究録, 201, 209, 225, 226, 238, 295
260, 248, 266, 416,

[11]佐藤幹夫述, 青木和彦記, 概均質ベクトル空間の特異軌跡と

超幾何関数（1971年東大での講義をまとめたもの）

[12] 佐藤幹夫氏のPrincetonにおける研究ノート

[13] 柏原-河合-木村，代数解析学の基礎，紀伊国屋数学叢書18（1980）

[14] 新谷卓郎述，神保道夫記，概均質ベクトル空間のゼータ関数について，（京大での講義をまとめたもの）

（解説）概均質ベクトル空間の理論が初めて，きちんとまとめられたのは[1]で，相対不変式のFourier変換について新谷氏自身の結果も含めて詳述されている。この時はまだ解析関数としてのzeta関数はできておらず，distributionとしてのzeta関数の関数等式を証明している。[2]は数論的立場からのごく一般的な紹介で証明は一切なし。[5]の前半は[12]の研究で未解決だった所を解決して既約概均質ベクトル空間の分類を完成し，後半は軌道分解を行ないdistributionの方法を用いて（[10]のNo.225の方法）多くの場合のb-関数を決定している。[5]の内容は，前半は更に証明を簡易化して，英文[2]にまとめられ，後半のb-関数の理論は代数解析的に整備され，英文[3]にまとめられ，b-関数の決定は，英文[6]，[7]，[8]にまとめられている。尚，解析関数としてのzeta関数は英文[1]にまとめられているが，この前半で，相対不変式が一個の場合

のFourier変換の証明は新谷氏による証明で[1]とは異なる。その後，佐藤幹夫氏のアイデアに基づいて，柏原正樹氏が代数解析的方法でFourier変換を計算する方法を1974年頃に確立した（柏原アルゴリズム，とも呼ばれている）。その結果を使って個々の場合のFourier変換を計算したのが[7]と[9]である。

この柏原アルゴリズムについては[4]と[10]No.238に解説があるが，これに関してLecture Noteを出す計画があって1976年以来，Part I 柏原，Part II 木村，Part III 室，と分担して書いたが，Part Iの最後の所が完成せず，そのまゝになってしまい，今だにFourier変換の代数解析的計算法をきちんと書いた英文の文献が一つもない事は残念な事である。今のところ，その予定もない。（1981年春現在）

References

[1]M.Sato and T.Shintani,On zeta-functions associated with prehomogeneous vector spaces,Ann.of Math.,100,1(1974),131-170.

[2]M.Sato and T.Kimura,A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants,Nagoya Math.J., 65,(1977),1-155.

[3]M.Sato,M.Kashiwara,T.Kimura and T.Oshima,Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces,Inv.Math.,62,(1980),117-179.

[4]T.shintani,On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms,J.Math.Soc. Japan,24(1972).

[5]T.Shintani,On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms,J.Fac.Sci.Univ.of Tokyo,22(1975),25-65.

[6]T.Kimura,The b-functions and holonomy diagrams of irreducible prehomogeneous vector spaces,Nagoya Math.J.,85,(1982,to appear).

[7]T.Kimura and M.Muro,On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces,Procof Japan Academy,55,Ser.A(1979).

[8]I.Ozeki,On the micro-local structure of the regular prehomogeneous vector space associated with SL(5) GL(4),Proc.of Japan Academy ,55,2A(1979),37-40.

[9]T.Kimura,A Classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups, to appear.